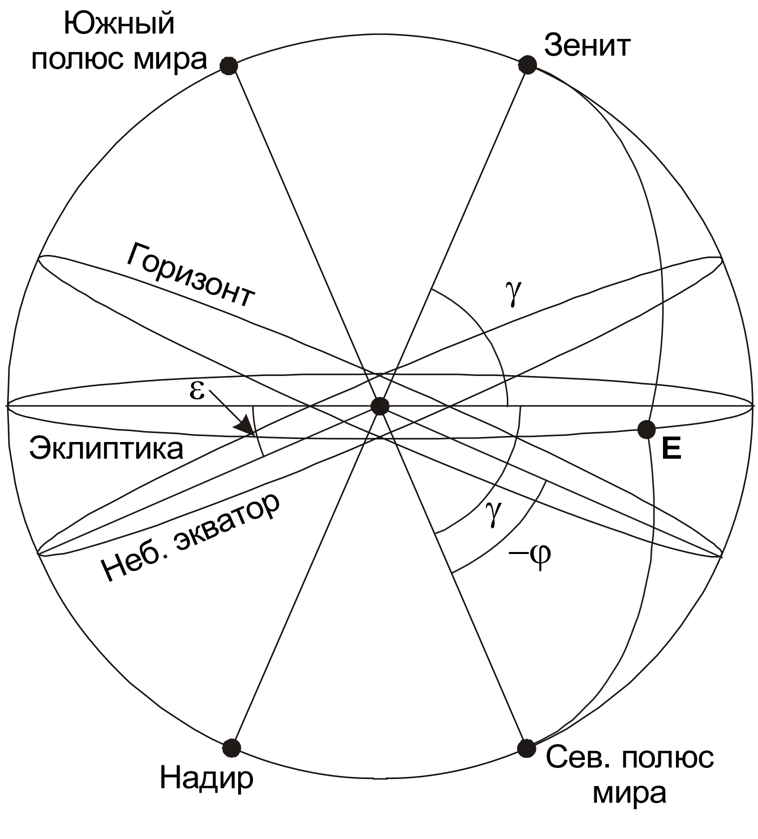
РОССИЙСКАЯ ОТКРЫТАЯ ЗАОЧНАЯ ШКОЛЬНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА – 2008

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Условие. Наблюдатель, находящийся в некоторой точке на поверхности Земли, в определенный момент времени заметил, что для каждой точки эклиптики выполняется удивительное свойство: ее угловое расстояние от Северного полюса мира было равно ее же зенитному расстоянию. Определите широту места наблюдения. Атмосферной рефракцией пренебречь. (*О.С. Угольников*)

1. Решение. Условие задачи автоматически выполняется в любое время на Северном полюсе Земли (широта +90°), где Северный полюс мира совпадает с зенитом, и угловое расстояние до Северного полюса мира сравнивается с зенитным расстоянием как для всех точек эклиптики, так и вообще для любой точки небесной сферы. Однако это решение не является единственным.

При наблюдении из точки поверхности Земли, удаленной от Северного полюса зенит и Северный полюс мира – две не совпадающие точки небесной сферы. Условие задачи может выполниться только в том случае, если эти точки окажутся симметричными относительно плоскости эклиптики. Соответствие условию задачи видно на рисунке на примере точки эклиптики **E**.



Эклиптика наклонена к небесному экватору на угол ε, равный 23.4°. Следовательно, угол между направлением на Северный полюс мира (перпендикулярным небесному экватору) и плоскостью эклиптики равен

$$\gamma = 90° - \varepsilon = 66.6°.$$

Симметрия Северного полюса и зенита относительно полюса эклиптики означает, что направление на зенит образует тот же угол γ с плоскостью эклиптики, а сама эта плоскость перпендикулярна плоскости, содержащей зенит и оба полюса мира. Последнее есть ни что иное, как плоскость небесного меридиана, перпендикулярная горизонту. Из этого следует, что зенитное расстояние Северного полюса мира равно

$$z_P = 2\gamma = 133.2°.$$

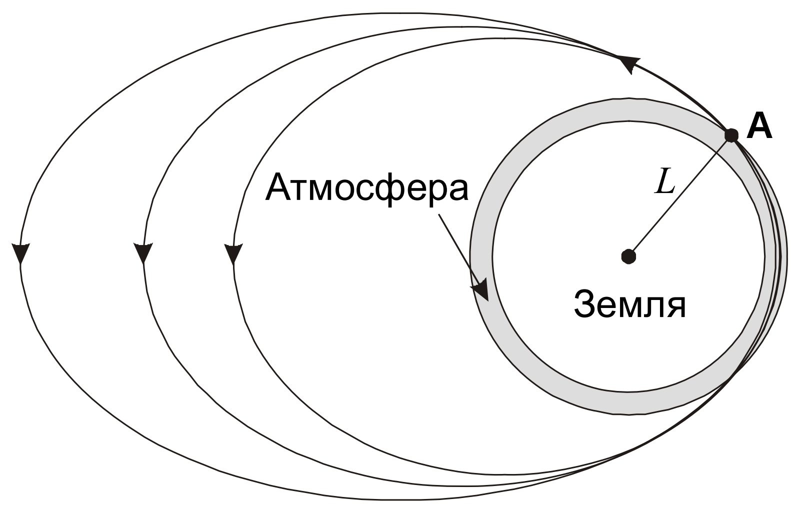
Северный полюс мира оказывается под горизонтом, следовательно, пункт наблюдения располагается в южном полушарии Земли. Широта места наблюдения отрицательна и равна по модулю глубине Северного полюса мира под горизонтом:

$$\varphi = -(z_P - 90°) = 90° - 2\gamma = -90° + 2\varepsilon = -43.2°.$$

Итак, условие задачи может выполняться на широтах +90° (там оно выполняется постоянно) и –43.2°.

2. Условие. Искусственный спутник Земли с массой 100 кг движется по вытянутой эллиптической орбите с высотой перигея 200 км и высотой апогея 10000 км. Вблизи перигея спутник испытывает тормозящее влияние земной атмосферы. Оцените время, через которое орбита спутника станет круговой. Тормозящую силу в атмосфере считать постоянной и равной 0.01 Н, а путь спутника в атмосфере за один виток равным радиусу Земли. (*О.С. Угольников*)

2. Решение. Для начала объясним, почему орбита спутника со временем превратится в круговую. Когда спутник находится вблизи точки апогея совей орбиты, он оказывается достаточно далеко от Земли, атмосфера нашей планеты на него не действует, и спутник движется по эллиптической траектории в соответствии с II законом Кеплера. При приближении к точке перигея скорость спутника существенно превышает первую космическую скорость для данного расстояния до Земли. Однако здесь спутник испытывает тормозящее влияние атмосферы. Как будет показано далее, оно не настолько велико, чтобы спутник на первом же обороте упал на поверхность Земли или сгорел в атмосфере, но при выходе из нее скорость спутника будет уже меньше, чем при входе в атмосферу.



Пусть L – расстояние от центра Земли до некоторой верхней границы плотных слоев атмосферы, выше которой ее тормозящее влияние уже мало. Скорость спутника на этой границе выражается формулой

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{L} - \frac{1}{a}\right),$$

где M – масса Земли, a – большая полуось орбиты. С каждым витком скорость v будет уменьшаться, следовательно, будет уменьшаться и большая полуось орбиты. При этом, пока орбита остается эллиптической и спутник будет вылетать из атмосферы, его высота в перигее будет изменяться достаточно мало. В результате, орбита спутника будет постепенно превращаться в круговую с высотой, близкой к высоте перигея изначальной орбиты. По мере ее достижения, когда спутник уже не будет выходить за пределы атмосферы, он начнет двигаться по спирали, опускаясь все ниже к Земле и увеличивая свою скорость, пока не прекратит свое существование. Однако этот, последний этап эволюции орбиты спутника в данной задаче не рассматривается.

Приводимое далее решение является упрощенным методом расчета времени эволюции орбиты – достаточно сложной в общем случае задачи. Оно позволяет оценить это время по порядку величины. Рассмотрим два последовательных момента вылета спутника из плотных слоев атмосферы (точка **A** на рисунке). Оговоримся, что они могут происходить не строго в одной и той же точке, но на одном и том же расстоянии от центра Земли L. Запишем связь между скоростями спутника в эти моменты и величинами большой полуоси орбиты на i-ом и (i+1)-ом витках:

$$v_i^2 = GM\left(\frac{2}{L} - \frac{1}{a_i}\right),$$
$$v_{i+1}^2 = GM\left(\frac{2}{L} - \frac{1}{a_{i+1}}\right),$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{m}{2}(v_{i+1}^2 - v_i^2) = -F \cdot D,$$

где m – масса спутника, F – сила торможения в атмосфере, D – длина пути спутника в атмосфере в течение одного оборота. В условии задачи принято, что величины F и D постоянны. Их произведение – работа силы торможения – составляет по модулю около 64 кДж, что несравнимо меньше кинетической энергии спутника в перигее. Из этого следует, что орбита спутника будет превращаться в круговую постепенно, в течение многих оборотов, а изменение большой полуоси Δa_i и орбитального периода ΔT_i за один оборот значительно меньше самих величин a_i и T_i.

Из формул, приведенных выше, получаем:

$$\frac{2FD}{GMm} = \frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i} \approx \frac{-\Delta a_i}{a_i^2}; \quad \Delta a_i = -\frac{2FD\,a_i^2}{GMm}.$$

Большая полуось и орбитальный период связаны друг с другом обобщенным III законом Кеплера:

$$a_i^3 = T_i^2 \cdot \frac{GM}{4\pi^2}.$$

Среднее изменение большой полуоси во времени в течение i-ого оборота есть величина Δa_i, деленная на орбитальный период:

$$\psi_{i1} = \frac{\Delta a_i}{T_i} = -\frac{FD\sqrt{a_i}}{\pi m\sqrt{GM}}.$$

Из вида этой зависимости можно предположить, что изменение величины большой полуоси a со временем будет иметь степенной характер, то есть существует такое значение n, для которого

$$\psi_{in} = \frac{\Delta(a_i^n)}{T_i} = const_i.$$

Попробуем найти число n. Параметр, стоящий в числителе последней формулы, равен

$$\Delta(a_i^n) = a_{i+1}^n - a_i^n = (a_i + \Delta a_i)^n - a_i^n \approx n\Delta a_i a_i^{n-1}.$$

Здесь мы воспользовались известным математическим соотношением для малой величины ρ

$$(1+\rho)^n \approx 1 + n\rho.$$

В итоге, изменение величины a_i^n в единицу времени составляет

$$\psi_{in} = \frac{\Delta(a_i^n)}{T_i} = \frac{\Delta a_i}{T_i} n a_i^{n-1} = -\frac{FDna^{(n-1/2)}}{\pi m\sqrt{GM}}.$$

Мы видим, что в случае n=1/2 данная величина перестает зависеть от большой полуоси, а следовательно, и от времени. Так как время эволюции орбиты значительно больше орбитального периода, мы можем рассматривать процесс уменьшения большой полуоси орбиты как непрерывный. В этом случае величина квадратного корня из большой полуоси будет уменьшаться со временем по линейному закону:

$$\sqrt{a} = \sqrt{a_0} - \frac{FD}{2\pi m\sqrt{GM}} t.$$

Здесь a_0 – начальная большая полуось орбиты, равная

$$a_0 = R + \frac{h_P + h_A}{2} = 11470 \text{ км},$$

где R – радиус Земли, h_P и h_A – высоты спутника в перигее и апогее. В течение эволюции орбиты величина h_P меняется мало, и радиус итоговой круговой орбиты составит

$$a_C = R + h_P = 6570 \text{ км}.$$

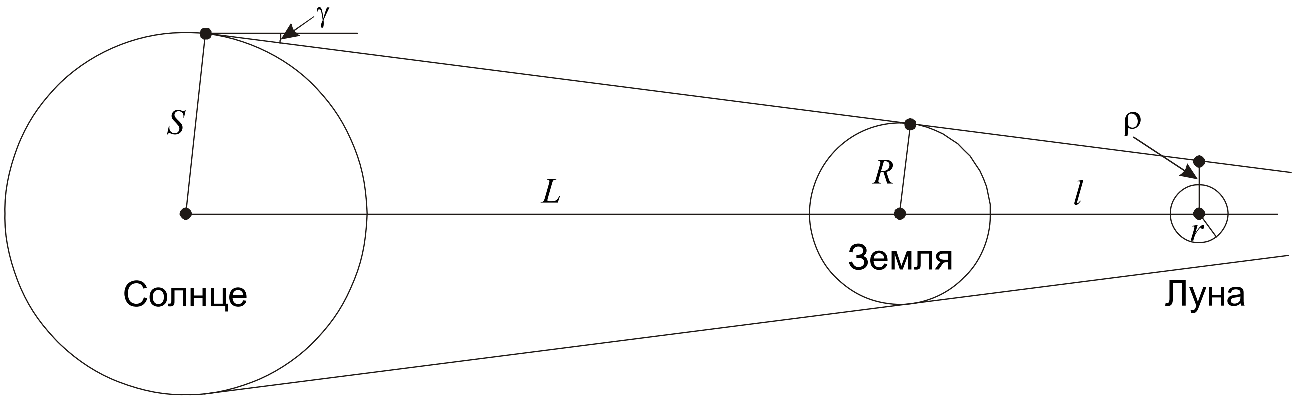
В итоге, время эволюции орбиты до круговой (с учетом D=R) равно

$$T_C = \frac{2\pi m\sqrt{GM}}{FD}(\sqrt{a_0} - \sqrt{a_C}) = 1.6\cdot 10^8 \text{ с}$$

или около 5 лет.

3. Условие. Наибольшая фаза полного теневого лунного затмения составила 1.865. Найдите продолжительность полной фазы теневого затмения. Атмосферным расширением земной тени пренебречь. (*О.С. Угольников*)

3. Решение. Значение наибольшей фазы очень велико. Определим, при каких расстояниях между Солнцем и Землей (L) и Землей и Луной (l) возможно наступление такого затмения. Предположим, что затмение центральное, Солнце, Земля и Луна находятся точно на одной линии. На рисунке показано положение Солнца, Земли и Луны во время такого затмения.

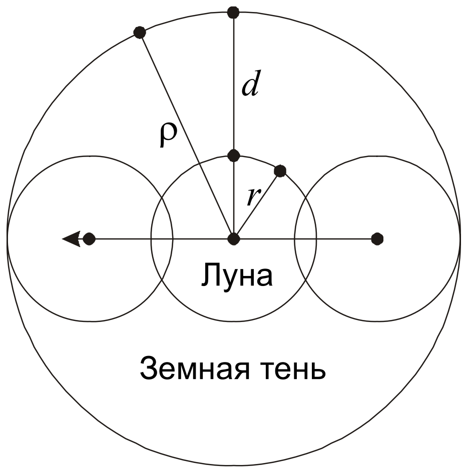


Определим радиус земной тени ρ в зависимости от расстояний L и l. Край конуса земной тени, касающийся Солнца и Земли, наклонен к линии, соединяющей центры Солнца и Земли, на угол

$$\gamma = \frac{S - R}{L}.$$

Этот угол, близкий к видимому радиусу Солнца, достаточно мал (в градусной мере он составляет около 0.26°), и для него справедливы тригонометрические соотношения малых углов, в частности, его косинус с высокой точностью можно считать равным единице. Радиус земной тени составит

$$\rho = R - \gamma l = \frac{R(L + l) - Sl}{L}.$$



Как видно из рисунка, фаза полного затмения в момент совпадения видимых центров Луны и тени равна

$$F = 1 + \frac{d}{2r} = 1 + \frac{\rho - r}{2r} = \frac{\rho + r}{2r}.$$

Здесь r – радиус Луны. Очевидно, что радиус тени и фаза полного затмения тем больше, чем больше расстояние между Солнцем и Землей L и чем меньше расстояние между Землей и

Луной l. В этом можно убедиться из первых двух формул решения. Предположим, что расстояние L достигает своего максимума (1.017 а.е.), то есть Земля находится в афелии своей орбиты, и дело происходит в начале июля. Если при этом подставить в формулу среднее значение расстояния между Землей и Луной l (384400 км), то максимальная фаза затмения окажется равной 1.832, что не удовлетворяет условию задачи.

При подстановке минимального значения расстояния между Землей и Луной l (356400 км) мы получаем величину максимальной фазы лунного затмения, которое можно наблюдать на Земле. Оно оказывается равным 1.868, что совсем ненамного больше значения, заданного в условии задачи. Из этого можно сделать вывод, что Луна во время затмения находилась в перигелии своей орбиты, ее расстояние от Земли практически не отличалось от минимального, и она прошла через центр тени Земли. Радиус тени оказывается равным 4757 км.

Пространственная скорость Луны на расстоянии l от Земли равна

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{l} - \frac{1}{a}\right)},$$

где a – большая полуось орбиты Луны. Численное значение скорости составляет 1.095 км/с. Земная тень также движется относительно Земли, ее скорость равна

$$u = v_0 \frac{l}{L},$$

где v_0 – орбитальная скорость Земли в афелии (29.3 км/с). Величина u оказывается равной 0.069 км/с, и эта скорость направлена в ту же сторону, что и скорость v. Как видно на рисунке, в течение полной фазы затмения Луна преодолевает путь

$$D = 2(\rho - r),$$

а продолжительность полной фазы равна

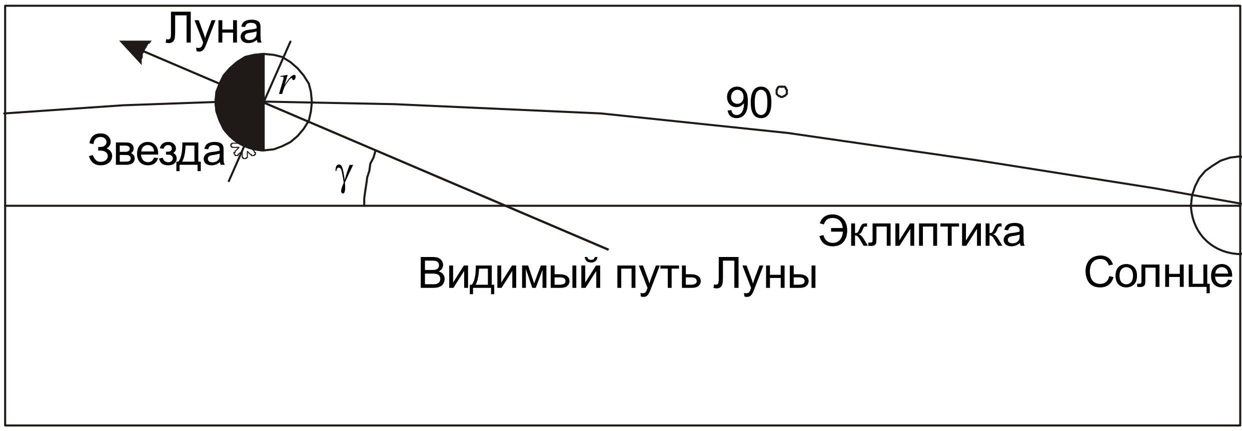
$$T = \frac{D}{v-u} = \frac{2(\rho - r)}{v-u},$$

что составляет 5885 секунд или 1 час и 38.1 минуты. Нужно отметить, что это не есть максимальная продолжительность полного лунного затмения. Последняя достигается при центральных затмениях вблизи точки апогея орбиты и составляет 1 час и 48 минут. Но фаза затмения при этом меньше.

Примечание. В эфемеридах лунных затмений, публикуемых в астрономических календарях и ежегодниках, в редких случаях можно встретить значение наибольшей фазы лунного затмения, большее 1.868. Это происходит вследствие того, что радиус земной тени искусственно принимается несколько большим своего геометрического значения, чтобы учесть влияние атмосферы Земли.

4. Условие. На экваторе Земли в зените наблюдается касательное покрытие звезды Луной в фазе первой четверти. Найдите максимально возможное угловое расстояние на небе между звездой и ближайшим «рогом» Луны (точкой пересечения лимба и терминатора) в момент касания. Орбиту Луны считать круговой. (*О.С. Угольников*)

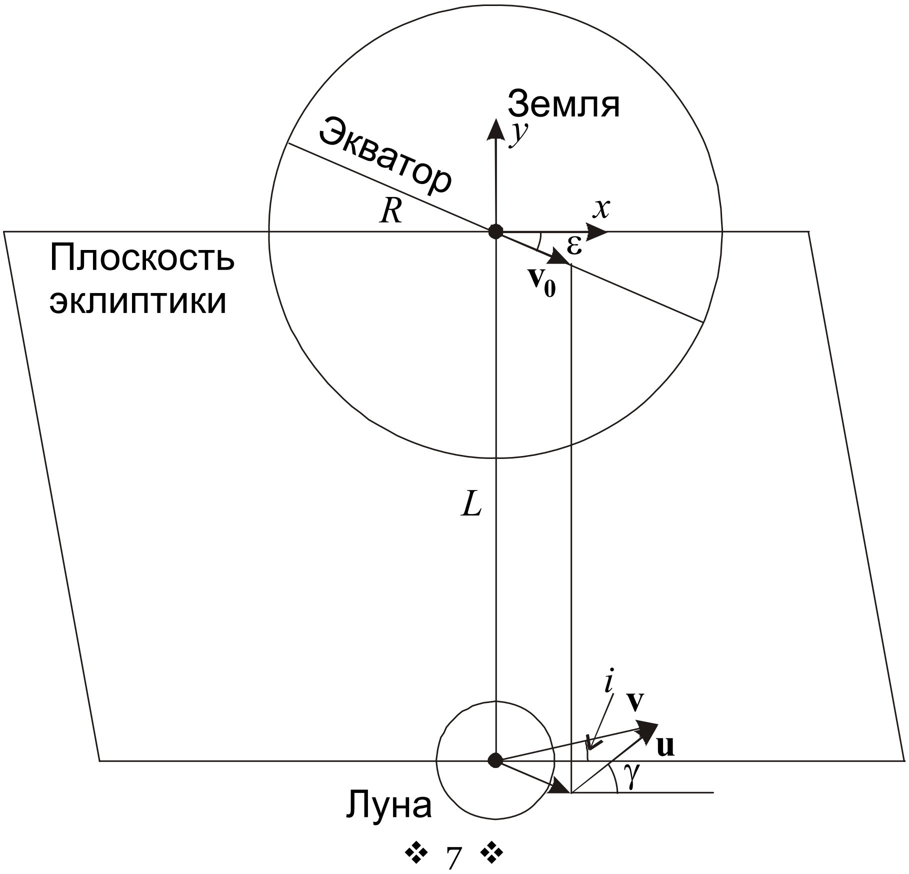
4. Решение. Изобразим на рисунке положение Солнца, Луны, звезды и линии эклиптики в момент покрытия. «Рога» Луны направлены вдоль большого круга небесной сферы, соединяющего Луну с Солнцем. Этот большой круг показан на рисунке в виде дуги. Следует отметить, что вследствие наклона лунной орбиты к эклиптике данный большой круг, вообще говоря, не совпадает ни с эклиптикой, ни с видимым путем Луны по небесной сфере.



Так как Солнце всегда располагается на эклиптике, а Луна в фазе первой четверти – в 90° от него, то рога Луны направлены точно вдоль эклиптики, вне зависимости от того, находится ли Луна на эклиптике или нет. И если видимое перемещение Луны относительно звезды в момент касания направлено вдоль эклиптики, то касание произойдет точно в точке «рога» – пересечения лимба и терминатора.

Таким образом, величина углового расстояния между звездой и рогом тем больше, чем больше наклон видимого пути Луны к эклиптике γ, и нам нужно определить максимальное значение этого угла. Если бы наблюдения проводились из центра Земли, эта задача была бы очевидной – максимальное значение угла γ равнялось бы наклону лунной орбиты к плоскости эклиптики *i*, равному 5.15°, и оно достигалось бы в момент пересечения Луной узла своей орбиты. Однако мы проводим наблюдения с поверхности вращающейся Земли, и угол γ может быть еще больше.

Вспомним, что по условию задачи касательное покрытие наблюдается в зените на экваторе Земли. Так как нас интересует максимальное значение угла γ, предположим, что Луна находится на эклиптике, проходя узел своей орбиты. Для определенности положим, что это восходящий узел.



На рисунке показано положение Земли и Луны на плоскости эклиптики. Луна пересекает эту плоскость под углом i и движется на север. Обозначим ее скорость через v. С учетом предположения о круговой орбите эту скорость легко определить:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{L}}.$$

Здесь M – масса Земли, L – расстояние от Земли до Луны. Скорость получается равной 1.02 км/с. Наблюдатель находится на экваторе Земли и движется вместе с ним под углом ε, равным 23.4°, к эклиптике за счет осевого вращения Земли со скоростью v_0:

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T}.$$

Здесь R – радиус Земли, T – продолжительность звездных суток. Численное значение скорости v_0 составляет 0.465 км/с. Скорость Луны относительно наблюдателя будет равна векторной разности указанных выше двух скоростей:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v_0}.$$

Искомый угол γ есть угол наклона вектора **u** к плоскости эклиптики. Этот угол будет максимальным, если вертикальная компонента скорости $\mathbf{v_0}$ противоположна вертикальной компоненте скорости **v**, то есть наблюдатель движется к югу через плоскость эклиптики и наблюдает Луну вблизи точки весеннего равноденствия. Аналогичная ситуация будет в случае нисходящего узла орбиты Луны у точки осеннего равноденствия.

Введем координатную систему (x, y), как показано на рисунке, и спроектируем последнее векторное уравнение на координатные оси:

$$u_x = v\cos i - v_0 \cos\varepsilon,$$
$$u_y = v\sin i + v_0 \sin\varepsilon.$$

Угол γ составляет

$$\gamma = \arctan\frac{u_y}{u_x} = \arctan\frac{v\sin i + v_0 \sin\varepsilon}{v\cos i - v_0 \cos\varepsilon} = 25.1^\circ.$$

Заслуживает внимания тот факт, что этот угол почти в 5 раз больше, чем в случае наблюдателя в центре Земли. Угловое расстояние между точкой касания и ближайшим «рогом» Луны может быть вычислено по формуле:

$$\sigma = 2\rho\sin\frac{\gamma}{2} = 2\frac{r}{L}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Здесь ρ – видимый радиус Луны. Переводя величину σ в градусную меру, получаем 0.113° или 6.8′. Если касание происходит у темного края Луны (как изображено на первом рисунке решения), данного углового расстояния вполне достаточно, чтобы наблюдать явление в бинокль или телескоп даже для неярких звезд.

5. Условие. Астероид обращается вокруг Солнца в плоскости эклиптики, не заходя внутрь орбиты Земли. Условия его наблюдения с Земли в точности повторяются с периодом в два года, а его блеск изменяется на 8^m с тем же периодом. Определите минимальное значение эксцентриситета орбиты астероида. Астероид представляет собой гладкий однородный шар с одинаковыми отражающими свойствами по всей поверхности. Орбиту Земли считать круговой. (*О.С. Угольников*)

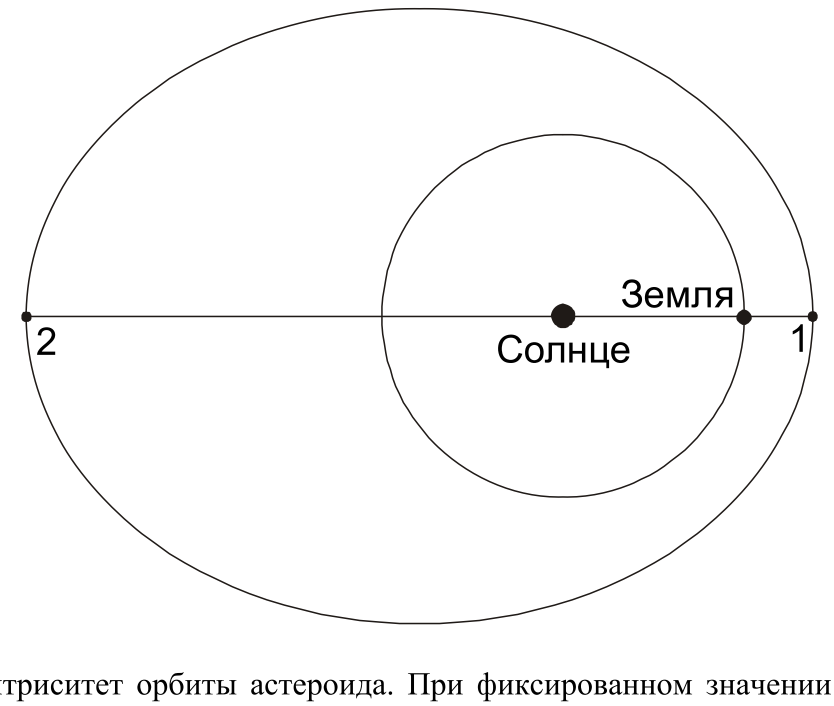
5. Решение. По прошествии двух лет Земля завершает два оборота вокруг Солнца, оказываясь в той же точке Солнечной системы. Раз условия видимости астероида оказываются теми же, он тоже возвращается в ту же точку, что и два года назад, завершая целое число оборотов вокруг Солнца. Так как астероид не заходит внутрь орбиты Земли, большая полуось его орбиты не меньше 1 а.е., а период обращения – не меньше одного года. Число орбитальных оборотов, сделанных астероидом за два года, не может превышать два.

Однако, случай двух оборотов за два года можно отбросить: имея орбитальный период, равный одному году, астероид будет либо заходить внутрь орбиты Земли (при эллиптической орбите), либо будет сохранять фиксированное положение относительно линии Солнце-Земля, практически не меняя свой блеск (при круговой орбите). Последний факт не зависит от наличия осевого вращения астероида вследствие однородности его поверхности. Итак, за два года астероид совершает один оборот вокруг Солнца. По III закону Кеплера большая полуось его орбиты a составляет $2^{2/3}$ или 1.587 а.е.

По условию задачи, астероид представляет собой гладкий однородный шар. В этом случае его блеск практически не зависит от фазового угла (с вершиной в центре астероида между направлениями на Солнце и Землю), и колебания блеска связаны с изменением расстояний от астероида до Солнца и Земли. Яркость астероида обратно пропорциональна квадратам обоих расстояний, а его звездная величина может быть выражена как

$$m = m_0 + 5 \lg d + 5 \lg r,$$

где m_0 – абсолютная звездная величина астероида (блеск, который он имел бы, находясь в 1 а.е. от Солнца и 1 а.е. от Земли), d и r – расстояния астероида до Земли и Солнца, выраженные в астрономических единицах.



Пусть e – эксцентриситет орбиты астероида. При фиксированном значении e и орбитальном периоде астероида, равном двум годам, максимальная амплитуда изменения блеска будет достигаться в случае, изображенном на рисунке. В момент противостояния астероида он находится в перигелии своей орбиты, в положении 1. Величины d и r одновременно достигают минимально возможных значений:

$$d_1 = a\,(1 - e) - a_0,$$
$$r_1 = a\,(1 - e),$$

где a_0 – радиус орбиты Земли. Соответственно, блеск астероида сравнивается с максимально возможной величиной. Через год Земля оказывается в той же точке своей орбиты, а астероид – в соединении с Солнцем и афелии, на максимально возможных расстояниях от Солнца и Земли:

$$d_2 = a\,(1 + e) + a_0,$$
$$r_2 = a\,(1 + e).$$

Блеск астероида достигает абсолютного минимума. Так как возможная амплитуда изменений блеска астероида увеличивается с эксцентриситетом орбиты, то для поиска минимального значения e нам нужно определить его, приравняв амплитуду блеска в конфигурации, описанной выше, требуемому значению 8^m:

$$5\lg d_2 + 5\lg r_2 - 5\lg d_1 - 5\lg r_1 = 8,$$

$$\frac{d_2 r_2}{d_1 r_1} = \frac{(a(1+e)+a_0)\,a\,(1+e)}{(a(1-e)-a_0)\,a\,(1-e)} = K = 10^{1.6} = 39.8.$$

Решение получающегося квадратного уравнения приводит к ответу:

$$e = \frac{2\,(K+1)\,a - (K-1)\,a_0 \pm \sqrt{(K-1)^2\,a_0^2 + 16Ka^2}}{2\,(K-1)\,a}.$$

Из двух корней физический смысл ($0<e<1$) имеет только второй, со знаком «–». Эксцентриситет орбиты получается равным 0.284, а перигелийное расстояние астероида – 1.137 а.е. Таким образом, условие задачи, по которому астероид не заходит внутрь орбиты Земли, также выполняется. При меньшем значении эксцентриситета орбиты, даже в случае противостояния в перигелии и соединения в афелии, амплитуда изменений блеска будет меньше 8^m. Таким образом, мы нашли минимальное значение эксцентриситета.

6. Условие. Наблюдатель на Земле измерил угловое расстояние между звездами **X** и **Y**, лежащими точно на эклиптике, и получил 30° с точностью до 0.1″, причем звезда **X** находится западнее звезды **Y** (эклиптическая долгота звезды **X** меньше). В момент наблюдения звезды располагались западнее Солнца, разность эклиптических долгот Солнца и звезды **X** составляла 100°. Определите, какое угловое расстояние между этими же звездами зафиксирует тот же наблюдатель через четверть года? Как изменится то же угловое расстояние, если проводить наблюдения с Солнца? Параллакс звезды **X** равен 0.5″, параллакс звезды **Y** – 0.2″. Эксцентриситетом орбиты Земли, атмосферными эффектами и собственными движениями звезд пренебречь. (*Е.Н. Фадеев*)

6. Решение. Изменение координат звезд со временем происходит вследствие двух причин: аберрации света и параллакса звезд. Рассмотрим эти эффекты по отдельности.

Аберрация света происходит вследствие конечности скорости распространения излучения. Ее действие на эклиптике изменяет положение звезды, смещая ее в сторону апекса движения наблюдателя. Эклиптическая долгота апекса наблюдателя на 90° меньше эклиптической долготы Солнца. Изменение эклиптической долготы звезды

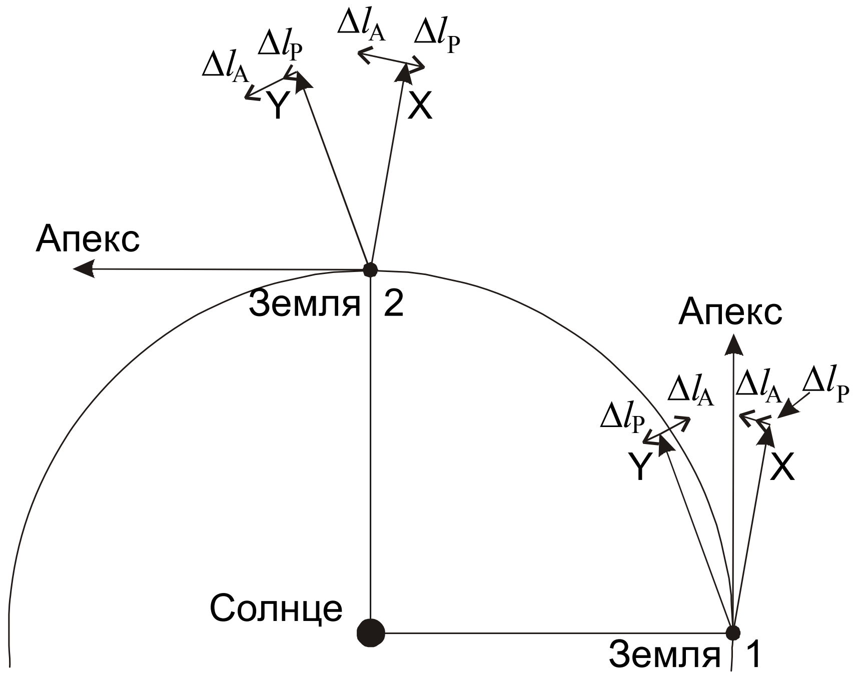
$$\Delta l_A = \frac{v}{c}\sin(a - l) = -k \cdot \cos(l_0 - l).$$

Здесь v – орбитальная скорость Земли, c – скорость света, k – постоянная аберрации, равная в градусной мере 20.5″, a – эклиптическая долгота апекса, l_0 – эклиптическая долгота Солнца, l – эклиптическая долгота звезды.

Параллактическое смещение звезды всегда направлено к Солнцу. Изменение эклиптической долготы звезды за счет параллакса составляет

$$\Delta l_P = \pi \cdot \sin(l_0 - l).$$

Здесь π – параллакс звезды. Так как обе величины смещения звезды очень малы, итоговое смещение звезды можно считать равным сумме двух составляющих. Вследствие малости поправок в данные формулы можно вставлять наблюдаемые величины эклиптических долгот звезд.



По условию задачи, в момент времени 1

$$l_{01} - l_X = 100°,$$
$$l_{01} - l_Y = 70°.$$

Из этого мы получаем величины поправок к эклиптической долготе этих звезд за счет аберрации и параллакса:

$$\Delta l_{X1} = -k \cdot \cos(l_{01} - l_X) + \pi_X \cdot \sin(l_{01} - l_X) = +3.6''+0.5'' = +4.1''.$$
$$\Delta l_{Y1} = -k \cdot \cos(l_{01} - l_Y) + \pi_Y \cdot \sin(l_{01} - l_Y) = -7.0''+0.2'' = -6.8''.$$

В итоге, разность эклиптических долгот $(l_Y - l_X)_1$, наблюдаемая в момент 1 и составляющая ровно 30°, оказывается на 10.9″ меньше, чем истинная разница эклиптических долгот $(l_Y - l_X)$, наблюдаемая с Солнца (в любое время) и равная, таким образом, 30°00′10.9″. Тем самым, мы ответили на второй вопрос задачи.

Для ответа на первый вопрос учтем, что через четверть года (момент времени 2) эклиптическая долгота Солнца увеличится на 90°, и мы будем иметь

$$l_{02} - l_X = 190°,$$
$$l_{02} - l_Y = 160°.$$

В соответствии с этим

$$\Delta l_{X2} = -k \cdot \cos(l_{02} - l_X) + \pi_X \cdot \sin(l_{02} - l_X) = +20.2'' - 0.1'' = +20.1''.$$
$$\Delta l_{Y2} = -k \cdot \cos(l_{02} - l_Y) + \pi_Y \cdot \sin(l_{02} - l_Y) = +19.3'' + 0.1'' = +19.4'.$$

Разность эклиптических долгот $(l_Y - l_X)_2$, оказывается на 0.7″ меньше, чем гелиоцентрическая величина $(l_Y - l_X)$ и равна, таким образом, 30°00′10.2″.

7. Условие. В марте 1997 года с Земли была прекрасно видна комета Хейла-Боппа, достигшая блеска -1.5^m. Ярчайшая внутренняя часть хвоста кометы имела длину около 10° и ширину около 1°. Представьте себе, что в это время к комете приблизилась пилотируемая экспедиция с Земли, которая совершила посадку на ядро кометы с противоположной стороны от Солнца. Смогут ли члены этой экспедиции, выйдя на поверхность ядра кометы, увидеть на небе звезды? (*О.С. Угольников*)

7. Решение. Для того, чтобы ответить на вопрос задачи, вспомним, как меняются яркостные характеристики протяженных объектов при изменении расстояния до них. Если мы приблизимся к комете Хейла-Боппа, скажем, в 2 раза, то она станет в 4 раза ярче, но и площадь, занимаемая кометой на небе, также увеличится в 4 раза. В результате, поверхностная яркость кометы (звездная величина единицы площади – квадратного градуса или квадратной секунды) не изменится. Если же мы влетим внутрь протяженного объекта, он может занять значительную долю или вообще всю небесную сферу, но поверхностная яркость будет не больше (а скорее всего – меньше) поверхностной яркости этого объекта, наблюдаемого извне.

Поверхностная яркость центральной части хвоста кометы Хейла-Боппа, составляет -1.5^m на 10 квадратных градусов. Учитывая, что в каждом квадратном градусе содержится 3600^2 квадратных секунд, вычислим звездную величину фрагмента кометы площадью в 1 квадратную секунду:

$$m = -1.5 + 2.5 \lg (10 \cdot 3600^2) = 18.8.$$

При посадке на ядро кометы со стороны хвоста свечение может занимать все небо, но его поверхностная яркость не может превышать данную величину. А это, в свою очередь, на $4\text{-}5^m$ ярче ночного безлунного неба Земли и примерно соответствует навигационным сумеркам на нашей планете. В это время глаз человека способен видеть звезды как минимум до четвертой звездной величины. Поэтому астронавты смогут увидеть звезды на небе ядра кометы Хейла-Боппа.

8. Условие. Звезда с температурой поверхности 15000 K и радиусом в 10 радиусов Солнца непрерывно в течение последних 100 лет теряет вещество в виде мощного постоянного звездного ветра, дующего со скоростью 20 км/с. За это время вокруг звезды образовалась газо-пылевая оболочка с оптической толщиной 0.2. Вычислите радиус видимой внешней и внутренней границ оболочки, температуру внешней границы оболочки, определите зависимость плотности пылевой материи в оболочке от расстояния до звезды. Найдите массу оболочки и темп потери массы. Температуру плавления пылинок считать равной 1500 K, радиус пылинок равен 1 мкм, их плотность – 3 г/см^3. Считать, что газа в туманности в 200 раз больше, чем пыли, но поглощение создается только пылью. (*А.М. Татарников*)

8. Решение. Нам известно, что темп потери массы звездой *M’* постоянен. Если разбить оболочку на тонкие сферические слои с одинаковой толщиной Δr, то масса, заключенная в этих слоях (как и количество частиц), будет одинакова. Обозначим эту массу как ΔM. Если радиус слоя равен R, то плотность внутри него составит

$$\rho(R) = \frac{\Delta M}{4\pi R^2 \Delta r} = \rho_{in}\left(\frac{R_{in}}{R}\right)^2.$$

Здесь R_{in} – радиус внутренней границы оболочки, ρ_{in} – плотность на этой границе. Тем самым, мы получили зависимость плотности внутри оболочки от расстояния до звезды. Определим температуру пылинок в зависимости от расстояния от звезды R. Обозначим радиус пылинки через a. Пылинка находится в тепловом равновесии, то есть энергия, получаемая ей от звезды, равна энергии, излучаемой пылинкой в окружающее пространство. Обозначив радиус и температуру звезды через R_* и T_*, запишем условие теплового равновесия:

$$\frac{4\pi\sigma T_*^4 R_*^2}{4\pi R^2}\cdot\pi a^2 = 4\pi\sigma a^2 T^4.$$

Из этой формулы получаем температуру пылинки:

$$T = T_*\sqrt{\frac{R_*}{2R}}.$$

На внутренней границе оболочки температура должна совпадать с температурой плавления пылинок. В этом случае даже при постоянном звездном ветре ближе к звезде пыли уже не будет. Приравнивая температуру T к температуре плавления T_0, получаем выражение для радиуса внутренней границы оболочки:

$$R_{in} = \frac{R_*}{2}\left(\frac{T_*}{T}\right)^2.$$

Подставляя численные значения, получаем 500 радиусов Солнца или 50 радиусов звезды. Радиус внешней границы оболочки находится проще:

$$R_{out} = v\cdot t,$$

где v – скорость звездного ветра (20 км/с), t – время истечения вещества (100 лет). Радиус внешней оболочки составляет $6.3\cdot10^{10}$ км, что равно примерно 90000 радиусам Солнца или 9000 радиусам звезды. Нужно обратить особое внимание, что радиус внешней границы больше радиуса внутренней границы оболочки. Физически это означает, что за 100 лет оболочка успела образоваться. Температура внешней границы оболочки равна

$$T_{out} = T_*\sqrt{\frac{R_*}{2R_{out}}} = 110\text{ K}.$$

Чтобы найти массу оболочки, получим выражение для оптической толщины пылевого поглощения. Будем считать, что пылинки задерживают излучение как темные шарики радиуса a. Тогда вероятность задержки излучения в слое радиусом R и толщиной ΔR (равная оптической толщине этого слоя) составляет

$$\Delta\tau(R) = n(R)\Delta R\cdot\pi a^2 = n_{in}\left(\frac{R_{in}}{R}\right)^2\pi a^2\Delta R.$$

Здесь $n(R)$ – концентрация пылинок на расстоянии R, n_{in} – их концентрация на внутренней границе оболочки. Общая оптическая толщина есть сумма оптических толщин каждого тонкого слоя. Она записывается в виде простого интеграла

$$\tau = \int\limits_{R_{in}}^{R_{out}} d\tau(R) = \int\limits_{R_{in}}^{R_{out}} n_{in}\left(\frac{R_{in}}{R}\right)^2 \pi a^2 dR = \pi a^2 n_{in} R_{in}^2 \left(\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{R_{out}}\right) \approx \pi a^2 n_{in} R_{in}.$$

Здесь мы учли, что внешний радиус оболочки значительно больше внутреннего. Оптическая толщина нам известна, и из этой формулы можно получить концентрацию пылинок на внутренней границе оболочки. Число пылинок в тонком слое радиусом R и толщиной ΔR составляет

$$\Delta N(R) = n(R)\cdot 4\pi R^2 \Delta R = n_{in}\cdot 4\pi R_{in}^2 \Delta R = \frac{4 R_{in}}{a^2}\Delta R.$$

Эта величина не зависит от радиуса, так как истечение массы со звезды происходит с постоянной скоростью. Учитывая этот факт, а также то, что внешний радиус оболочки много больше внутреннего, получаем общее число пылинок в оболочке:

$$N = \frac{4\tau R_{in} R_{out}}{a^2}.$$

Для нахождения общей массы оболочки учтем, что газа в ней в K раз больше по массе, нежели пыли. Обозначив плотность пылинок через ρ_0, выразим массу оболочки:

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 \cdot NK = \frac{16\pi\tau R_{in} R_{out} a \rho_0 K}{3}.$$

Это равно $4\cdot 10^{25}$ кг или $2\cdot 10^{-5}$ массы Солнца. Данная масса была сброшена за 100 лет, следовательно, темп потери массы звезды составляет $4\cdot 10^{23}$ кг или $2\cdot 10^{-7}$ массы Солнца в год.

9. Условие. Время от времени в далеких галактиках происходят гамма-всплески – достаточно короткие, в среднем несколько секунд, вспышки жесткого гамма-излучения, средняя энергия кванта составляет примерно 1 МэВ. Поток квантов от гамма-всплесков, которые регистрируются на орбите Земли, должен превышать 50 квантов в секунду на квадратный сантиметр. Энергия, выделяемая гамма-всплеском за 1 секунду, составляет 10^{49} эрг, излучение испускается в виде двух противоположно направленных конусов с углом раствора 10 градусов. Гамма-всплески с такими параметрами фиксируются в среднем 1 раз в неделю. Как часто происходят гамма-всплески в отдельной галактике? С какого расстояния они видны? Насколько чаще или реже стали бы наблюдаться гамма-всплески, если бы ширина конуса излучения в них была в 2 раза меньше? (*М.Е. Прохоров*)

9. Решение. Вначале определим, какую часть сферы охватывают два конуса, в которых распространяется излучение. Эти конусы вырезают на сфере круги с радиусом 5° или 0.087 радиан. Обозначим данный угол через ρ. Этот угол сравнительно невелик, и круги на сфере можно считать плоскими. Тогда часть сферы, в которой распространяется излучение, есть отношение площади двух кругов к полной площади сферы:

$$b = \frac{2\pi\rho^2}{4\pi} = \frac{\rho^2}{2} = 0.004.$$

Выражая среднюю энергию одного кванта (1 МэВ) в единицах СГСЭ, получаем $1.6\cdot 10^{-6}$ эрг. Следовательно, во время гамма-всплеска за секунду в пространство выбрасывается примерно $6\cdot 10^{54}$ квантов гамма-излучения. Обозначим эту величину как J_0. Определим, с какого расстояния мы можем зафиксировать этот всплеск, имея аппаратуру с заданной чувствительностью E:

$$E = \frac{J_0}{4\pi b R^2}; \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{J_0}{\pi b E}} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{J_0}{2\pi E}}.$$

Естественно, мы предполагаем, что Земля попадает в один из конусов, в которых распространяется излучение. В результате, мы получаем, что гамма-всплеск может быть зарегистрирован с расстояния R, равного 500 Мпк. Изменение потока от гамма-всплеска за счет космологического расширения Вселенной на таких расстояниях еще невелико.

Как известно, средняя концентрация галактик во Вселенной n составляет примерно 0.01 Мпк$^{-3}$. Это число можно получить из полного числа галактик во Вселенной (10^{10}) и характерного размера Вселенной (10 Гпк). Следовательно, число галактик, оказывающихся внутри сферы радиуса R, составляет

$$N = \frac{4}{3}\pi R^3 n = \frac{n}{6\sqrt{\pi}}\left(\frac{J_0}{bE}\right)^{3/2} \sim 5\cdot 10^6.$$

В этих галактиках мы наблюдаем гамма-всплески с частотой F, равной 1 всплеску в неделю или 50 всплескам в год. Однако мы регистрируем далеко не все всплески, так как не всегда попадаем в конусы излучения. Полная частота вспышек в этих галактиках равна

$$F_0 = \frac{F}{b}$$

или 12500 всплесков в год. Частота всплесков в одной галактике составит

$$F_1 = \frac{F_0}{N} = F\frac{6\sqrt{\pi b}}{n}\left(\frac{E}{J_0}\right)^{3/2} = F\frac{3\sqrt{2\pi}}{n}\left(\frac{E}{J_0}\right)^{3/2}\rho.$$

или примерно 1 раз в 400 лет. При этом нужно отметить, что лишь 1/250 этих всплесков будет наблюдаться с Земли, то есть наблюдаемая частота всплесков в одной галактике составит 1 событие в 100 тысяч лет.

Мы видим, что эта величина пропорциональна квадратному корню из b или радиусу конуса ρ, в котором распространяется излучение. Если бы этот радиус был вдвое меньше, то мы пришли бы к вдвое меньшей величине частот вспышек в одной галактике. Однако, мы видим, что величина F_0 уже обратно пропорциональна квадратному корню из b (или величине ρ), то есть наблюдаемая частота всплесков возросла бы вдвое!

Этот парадокс легко объяснить. При вдвое меньшем радиусе конуса и той же чувствительности мы бы видели всплески, вдвое более далекие от нас, которые занимали бы в 8 раз больший объем во Вселенной. Вероятность зарегистрировать такой всплеск уменьшалась бы в 4 раза. Таким образом, мы имеем выигрыш в числе наблюдаемых всплесков в 2 раза.

10. Условие. Известно, что температура реликтового излучения в направлении с галактическими координатами l = 264° и b = 48° больше среднего на ΔT = 3.35 мК, причем это отклонение наибольшее по всему небу. Определить скорость движения галактики как целого относительно реликтового фона. (*Е.Н. Фадеев*)

10. Решение. Для начала определим скорость движения Солнца относительно реликтового излучения. Очевидно, что изменение температуры излучения происходит в связи с эффектом Доплера:

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}.$$

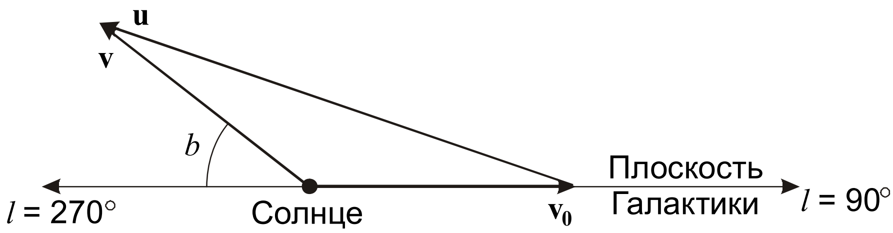
Здесь λ_0 – средняя по небу длина волны максимума реликтового излучения, λ – длина волны максимума излучения в заданном направлении, v – скорость Солнца относительно реликтового излучения. Поскольку реликтовое излучение с высокой точностью является чернотельным, то длина волны максимума излучения обратно пропорциональна температуре излучения, а точнее выражается законом смещения Вина:

$$\lambda\,(\text{см}) = \frac{0.29}{T}\,\cdot$$

Отсюда получаем выражение для скорости:

$$v = c \cdot \frac{T - T_0}{T} = c\frac{\Delta T}{T}.$$

Из этой формулы мы получаем, что Солнце движется относительно реликтового фона со скоростью 368 км/с в направлении, определяемом галактическими координатами $l = 264°$ и $b = 48°$. В то же время мы знаем, что Солнце движется относительно центра Галактики со скоростью v_0, составляющей около 220 км/с и направленной в точку с галактическими координатами $l_0 = 90°$ и $b_0 = 0°$.



Вектор скорости центра Галактики относительно реликтового фона равен

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v_0}.$$

Мы видим, что галактическая долгота l, соответствующая вектору **v**, близка к 270°, и мы с хорошей точностью можем считать, что все три вектора расположены в плоскости рисунка, перпендикулярной плоскости Галактики. В этом случае величину скорости u можно вычислить как

$$u = \sqrt{v^2 + v_0^2 - 2vv_0\cos(180° - b)}.$$

Подставляя численные значения, получаем 540 км/с. Если учесть отличие координаты l от 270°, то ответ с точностью до 1 км/с будет таким же.